Die Grenzen der Quantentheorie der Wellenfelder

Von KARL WILDERMUTH

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **8a**, 105—116 [1953]; eingegangen am 1. November 1952)

Betrachtet man in der Quantentheorie der Wellenfelder die feldtragenden Teilchen (z. B. die Lichtquanten und die Mesonen) als aus Spinorteilchen zusammengesetzte Teilchen, so bringt es diese Vorstellung zwangsläufig mit sich, daß der bisher übliche Formalismus der Quantentheorie der Wellenfelder höchstens näherungsweise richtig sein kann. Denn in ihm werden die einzelnen Teilchensorten (Elektronen und Lichtquanten bzw. Nukleonen und Mesonen) unabhängig voneinander eingeführt und außerdem werden sämtliche Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Teilchensorten durch punktförmige Wechselwirkungen beschrieben. Um den Gültigkeitsbereich dieses Formalismus abschätzen zu können und einen ersten Aufschluß über seine eventuelle Abänderung gewinnen zu können, wird ein Beispiel der unrelativistischen Quantenmechanik behandelt, in welchem die Entstehung und Vernichtung von zusammengesetzten Teilchen — wie z. B. Wasserstoffatome, Wasserstoffmolekülionen usw. — beschrieben wird. Es wird so umgeformt, daß diese Teilchen in der Theorie als neue Teilchensorten in Erscheinung treten. Anschließend wird das so umgeformte Beispiel dann mit der Quantenelektrodynamik und der Mesonentheorie verglichen. Aus diesem Vergleich ergibt sich z. B., daß man die bisher untersuchten Feldkräfte, die durch das elektromagnetische Feld und die Mesonenfelder übertragen werden, als eine Integration über die direkten Wechselwirkungskräfte der felderzeugenden Teilchen untereinander auffassen muß. Daraus folgt dann, daß man nicht erwarten kann, daß die Mesonentheorie in ihrer bisherigen Form irgendwelche Ergebnisse liefert, die mit den Experimenten quantitativ übereinstimmen. Zum Schluß wird kurz eine Möglichkeit skizziert, wie man die bisherige Quantentheorie der Wellenfelder eventuell abändern muß, um zur Theorie der Elementarteilchen vorzustoßen.

Die Entwicklung der Quantentheorie der Wellenfelder innerhalb der letzten Jahre zeigt immer deutlicher, daß sich die Unterscheidung zwischen elementaren und zusammengesetzten Teilchen mehr und mehr zu verwischen beginnt und es großenteils eine Frage der Zweckmäßigkeit sein wird, welche Teilchen man als elementar und welche Teilchen man als zusammengesetzt betrachten will[1]. Voraussichtlich werden sogar alle in der Natur vorkommenden Teilchen bereits eine sehr komplexe Struktur besitzen[2]. Als Beispiel hierzu seien das Neutron und das Proton erwähnt, die man sich bekanntlich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch aus Proton und negativem Meson bzw. aus Neutron und positivem Meson zusammengesetzt vorstellen muß, um die Anomalie ihrer magnetischen Momente erklären zu können. Weiterhin zeigt sich hauptsächlich aus der Untersuchung der Höhenstrahlung, daß bei hohen Energien alle Teilchensorten sehr eng miteinander verknüpft sind. Die Erzeugung von π-Mesonen beim Zusammenstoß sehr schneller Nukleonen und der anschließende $\mu - e$-Zerfall sind ein Beispiel dafür.

Diese experimentellen Ergebnisse weisen darauf hin, daß bei sehr energiereichen Prozessen die Beschreibung der verschiedenen Teilchensorten durch voneinander unabhängige Wellentheorien nicht mehr möglich ist. Z. B. lassen sich bei hohen Energien, bei denen Nukleonen, τ-Mesonen, π-Mesonen, Elektronen, Lichtquanten usw. entstehen können, die elektrodynamischen Wechselwirkungen nicht mehr unabhängig von den Wechselwirkungen der Nukleonen untereinander beschreiben, wie es bei kleinen Energien möglich ist.

Auf Grund dieser experimentellen Ergebnisse hat Heisenberg vorgeschlagen[2], alle Elementarteilchen und zusammengesetzten Teilchen mittels einer einheitlichen Wellentheorie zu beschreiben. Als Grundwellenfunktionen muß man dabei Spinoren nehmen, da man Skalare, Vektoren und Tensoren usw. aus Spinoren aufbauen kann, aber nicht umgekehrt Spinoren aus Skalaren, Vektoren und Ten-

[1] W. Heisenberg, Two Lectures, Cambridge Univ. Press 1949.

[2] W. Heisenberg, Z. Naturforschg. **5a**, 251, 367 [1950]; **6a**, 6 [1951].

soren bilden kann. Aus diesen Überlegungen folgt, daß man die feldtragenden Teilchen (z. B. die Lichtquanten[3] und die π-Mesonen[4]) als aus Spinorteilchen zusammengesetzt anzusehen hat.

Die obigen Ideen werden durch die letzte Entwicklung der Quantenelektrodynamik unterstützt. So hat sich im Anschluß an die Diracsche Positronentheorie als sehr fruchtbar herausgestellt, sich das Vakuum als ein Dielektrikum vorzustellen, dessen Dielektrizitätskonstante von 1 verschieden ist und von der elektrischen Feldstärke abhängt (beschrieben durch die nichtlinearen Terme der Quantenelektrodynamik). Die Dipole des Dielektrikums sind die Teilchen-Antiteilchenpaare der Energie 0, mit denen das Vakuum aufgefüllt ist. Man kann sie auch Lichtquanten der Energie 0 nennen. Die Ruhmasse dieser Paare ist kompensiert durch ihre Bindungsenergie. Das Coulomb-Feld eines Elektrons und seine Vakuumpolarisation ist nichts anderes als die Polarisation dieses Dielektrikums. Hierbei muß man annehmen, daß zwischen den Teilchen und Antiteilchen direkte Wechselwirkungskräfte existieren, die für die Bindung dieser Teilchen in den Lichtquanten verantwortlich sind. Beispielsweise geschieht die Paarerzeugung durch energiereiche Lichtquanten dadurch, daß solch ein zusammengesetztes Teilchen im Coulomb-Feld in ein Elektron-Positronpaar auseinandergerissen wird. Das Coulomb-Feld z. B. eines Elektrons entsteht dann durch Integration über die sich von Punkt zu Punkt übertragenden Wechselwirkungskräfte der Vakuumteilchen (Polarisation dieser Teilchen). Man erkennt daraus, daß auch das Elektron eine sehr komplexe Struktur besitzt, da nach den obigen Vorstellungen das wechselwirkungsfreie Elektron kein Coulomb-Feld und damit auch kein magnetisches Moment besitzt.

Falls diese Ideen grundsätzlich richtig sind, so bewirken sie, daß z. B. die π-Mesonen und die Lichtquanten als gebundene Zustände von Teilchen- und Antiteilchen in ihrer Beschreibung nicht unabhängig von diesen Teilchen und Antiteilchen sind. Im Gegensatz dazu werden in der Quantentheorie der Wellenfelder die einzelnen Teilchensorten, z. B. in der Quantenelektrodynamik, die Lichtquanten und die Elektronen, zunächst unabhängig voneinander in die Theorie eingeführt und erst anschließend werden zur Beschreibung ihrer gegenseitigen Wechselwirkung ihre Wellenfunktionen in nichtlinearen Wechselwirkungstermen miteinander gekoppelt[5]. Daher ist es von großem Interesse zu untersuchen, ob und inwieweit der bisher übliche Formalismus der Quantentheorie der Wellenfelder mit der obigen Vorstellung über die feldtragenden Teilchen verträglich ist.

Über diese Fragen kann man nun bereits aus der unrelativistischen Quantenmechanik einen ersten Aufschluß erhalten. Denn betrachten wir z. B. ein System, bestehend aus Elektronen und Protonen, so können sich aus diesen Teilchen bekanntlich Wasserstoffatome, Wasserstoffmolekülionen, Wasserstoffmoleküle usw., also zusammengesetzte Teilchen bilden, die wir als Analogon zu den Lichtquanten und Mesonen betrachten können. Andererseits können alle diese Vorgänge bei kleinen Energien vollständig durch die unrelativistische Quantenmechanik beschrieben werden. Man wird daher zunächst versuchen, die Beschreibung dieser Vorgänge möglichst an die Quantenelektrodynamik und die Mesonentheorie anzugleichen. Dazu geht man so vor, daß man als Ersatz für die gebundenen Zustände der zusammengesetzten Teilchen Operatoren in die Theorie einführt, die die Erzeugung und Vernichtung dieser Teilchen beschreiben, analog zu den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Lichtquanten und Mesonen. Die so umgeformte unrelativistische Quantenmechanik kann man dann mit der Quantenelektrodynamik und der Mesonentheorie vergleichen und daraus ersehen, wie weit sich diese Theorien jetzt prinzipiell ähnlich sind und in welchen Punkten prinzipielle Unterschiede bestehen. Daraus lassen sich dann wieder Rückschlüsse auf den Gültigkeitsbereich der bisherigen relativistischen Quantentheorie der Wellenfelder ziehen und man bekommt einen Hinweis, in welcher Richtung diese Theorie eventuell abzuändern ist, um zur Theorie der Elementarteilchen vorzustoßen.

Da es uns darauf ankommt, die prinzipiellen Punkte so klar wie möglich herauszuschälen, soll zur quantitativen Durchführung des obigen Programms ein möglichst einfaches Modell betrachtet werden. Dazu wird angenommen, daß man es mit zwei Teilchensorten zu tun hat, die beide erstens mit skalaren Wellenfunktionen beschrieben werden

[3] Nach P. Jordan, Z. Physik **102**, 243 [1936]; **105**, 114 [1937], u. L. de Broglie, C.R. hebd. Séances Acad. Sci. **203**, 33 [1936]; **229**, 157, 269 [1949].

[4] Nach E. Fermi u. C. N. Jang, Physic. Rev. **76**, 1739 [1949].

[5] S. z. B.: G. Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Franz Deuticke Wien 1943.

können und zweitens nur einen Freiheitsgrad besitzen. Die Teilchen der Sorte 2 sollen außerdem mit dem Ursprung durch ein δ-funktionsartiges Potential in Wechselwirkung stehen, während die Teilchen der Sorte 1 nur mit den Teilchen der Sorte 2 (ebenfalls durch ein δ-funktionsartiges Potential) wechselwirken. Die Wechselwirkung der Teilchen 2 mit dem Ursprung bedeutet, daß sich am Ursprung Teilchen unendlich großer Masse befinden, mit denen die Teilchen 2 wechselwirken können.

Benutzt man solche Einheiten, in denen die Masse die Dimension 1 und der Impuls die einer reziproken Länge besitzt und sei außerdem die Masse eines Teilchens beider Sorten gleich $1/2$, so erhält man zur Beschreibung des obigen Modells eines Wellenfeldes folgende Hamilton-Funktion (es wurden dieselben Einheiten, wie in dem unter Anm. 6 zitierten Beispiel gewählt, um den späteren Vergleich mit diesem Beispiel zu erleichtern):

$$\begin{aligned}
H = & \int \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathrm{d}x \\
& + \int \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathrm{d}x - 2B \int \delta(x)\, \psi^+(x) \psi(x)\, \mathrm{d}x \\
& + A \int \psi^+(x)\, \psi(x)\, \delta(x-x')\, \varphi^+(x')\, \varphi(x')\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x' \qquad (1) \\
= & \int \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathrm{d}x + \int \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathrm{d}x - 2B\, \psi^+(0)\, \psi(0) \\
& + A \int \psi^+(x) \psi^+(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme in (1) stellen die kinetische Energie der Teilchen 1 und 2 dar, während der dritte Term die Wechselwirkungsenergie der Teilchen 2 mit dem Ursprung und der vierte Term die gegenseitige Wechselwirkungsenergie der beiden Teilchensorten angibt.

Zur Darstellung der Partikeleigenschaften der beiden Teilchensorten führen wir folgende Vertauschungsrelationen ein:

$$\begin{aligned}
[\varphi(x)\, \varphi^+(x')]_- &= \delta(x-x')\,, \\
[\psi(x)\, \psi^+(x')]_- &= \delta(x-x')\,.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Im übrigen sollen die in (1) auftretenden Wellenfunktionen miteinander vertauschbar sein. Die −-Vertauschungsrelationen in (2) bedeuten, daß beide Teilchensorten der Bose-Statistik gehorchen.

Setzt man in (1) zunächst $A=0$ und außerdem B als positiv voraus, so gibt es Eigenzustände zu diesem verkürzten Hamilton-Operator, bei denen Teilchen der Sorte 2 mit der Bindungsenergie $-B^2$ an den Ursprung gebunden sind. Diese Zustände stellen in dem hier geschilderten Modell eines Wellenfeldes das Analogon zu den Lichtquanten bzw. Mesonen dar. Fassen wir, wie es im folgenden immer geschehen soll, die Operatoren φ, φ^+ und ψ, ψ^+ als zeitunabhängige Operatoren auf, so wird der Zustand „ein Teilchen 2 am Ursprung gebunden“ durch folgenden Vektor im Hilbert-Raum dargestellt [7]:

$$\Psi_{\text{geb}} = \sqrt{B} \int \mathrm{d}x\, e^{-B|x|}\, \psi^+(x)\, \Psi_0\,, \qquad (3)$$

$$\{\Psi_0 = \text{Zustandsvektor des Vakuums}\}.$$

Man kann dies durch Einsetzen von (3) in (1) unter Benutzung der Vertauschungsrelation (2) leicht zeigen. Der Normierungsfaktor $\sqrt{B}$ bewirkt, daß der Zustandsvektor (3) richtig auf 1 normiert ist. Man kann daher den Operator $D^+ = \sqrt{B} \int \mathrm{d}x\, e^{-B|x|}\, \psi^+(x)$ als Erzeugungsoperator für „ein gebundenes Teilchen 2 am Ursprung“ auffassen. (Es sei von jetzt ab als Teilchen der Sorte 3 bezeichnet.) Um diesen Erzeugungsoperator D^+ und den zugehörigen, dazu adjungierten Vernichtungsoperator D in die Theorie einzuführen, betrachten wir zunächst den Operator $\psi^+(x)$. Dieser Operator, angewandt auf den Zustandsvektor Ψ_0, erzeugt ein Teilchen der Sorte 2 am Ort x. Entwickelt man diesen neuen Zustandsvektor nach den Eigenvektoren des verkürzten Hamilton-Operators (1) ($A=0$), so erhält man als Entwicklungskoeffizient zum Bindungszustand des Teilchens 2 am Ursprung $\sqrt{B}\, e^{-B|x|}$. Man kann daher $\psi^+(x)$ und $\psi(x)$ in folgender Weise aufspalten:

$$\begin{aligned}
\psi^+(x) &= \psi^+(x) - \sqrt{B}\, e^{-B|x|} \int \sqrt{B}\, \mathrm{d}x'\, e^{-B|x'|}\, \psi^+(x') + \sqrt{B}\, e^{-B|x|}\, D^+\,, \\
\psi(x) &= \psi(x) - \sqrt{B}\, e^{-B|x|} \int \sqrt{B}\, \mathrm{d}x'\, e^{-B|x'|}\, \psi(x') + \sqrt{B}\, e^{-B|x|}\, D\,.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Setzt man (4) in (1) ein, so erhält man nach einigen Umformungen aus (1):

$$\begin{aligned}
H = \overline{H} = & \int \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathrm{d}x + \int \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathrm{d}x + \underline{B^2 \int \sqrt{B}\, e^{-B|x'|}\, \psi^+(x')\, \mathrm{d}x' \int \sqrt{B}\, e^{-B|x''|}\, \psi(x'')\, \mathrm{d}x''} \\
& - 2B\, \psi^+(0)\, \psi(0) - B^2 D^+ D + A \int \Big\{ \psi^+(x) - \underline{\sqrt{B}\, e^{-B|x|} \int \sqrt{B}\, \mathrm{d}x'\, e^{-B|x'|}\, \psi^+(x')} + \sqrt{B}\, e^{-B|x|}\, D^+ \Big\} \\
& \cdot \Big\{ \psi(x) - \underline{\sqrt{B}\, e^{-B|x|} \int \sqrt{B}\, \mathrm{d}x''\, e^{-B|x''|}\, \psi(x'')} + \sqrt{B}\, e^{-B|x|}\, D \Big\}\, \varphi^+(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\,. \qquad (5)
\end{aligned}$$

[6] K. Wildermuth, Z. Physik **127**, 92, 122 [1949].

[7] Vgl. z. B.: R. Becker u. G. Leibfried, Physic. Rev. **76**, 1739 [1949].

Außerdem gelten jetzt für die in (5) auftretenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgende Vertauschungsrelationen:

$$\begin{gathered}[\psi(x)\,\psi^{+}(x')]_{-} = \delta(x-x')\,, \qquad [D\psi^{+}(x')]_{-} = \sqrt{B}\,e^{-B|x'|}, \qquad [D\psi(x')]_{-} = [D^{+}\psi^{+}(x')]_{-} = 0\,,\\ [\psi(x)D^{+}]_{-} = \sqrt{B}\,e^{-B|x|}, \qquad [\varphi(x)\,\varphi^{+}(x')]_{-} = \delta(x-x')\,,\\ [D\varphi^{+}(x)]_{-} = [D^{+}\varphi(x)]_{-} = [D\varphi(x)]_{-} = [D^{+}\varphi^{+}(x)]_{-} = 0\,, \qquad [DD^{+}]_{-} = 1\,.\end{gathered} \tag{6}$$

Analog zu vorhin sind die übrigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in (5) miteinander vertauschbar.

Sämtliche Probleme, die man mit dem Hamilton-Operator (1) und den Vertauschungsrelationen (2) behandeln kann, können auch mit dem Hamilton-Operator (5) und den Vertauschungsrelationen (6) behandelt werden, nur daß jetzt der Einfang der Teilchen der Sorte 2 am Ursprung bzw. ihre Ablösung vom Ursprung als Umwandlung eines Teilchens der Sorte 2 in ein Teilchen der Sorte 3 bzw. umgekehrt beschrieben wird.

Bevor auf die wesentlichen Unterschiede des hier geschilderten Schemas zur üblichen Quantentheorie der Wellenfelder eingegangen wird, soll zur Illustration dessen, wie man mit den Gl. (5) und (6) rechnen kann, zunächst folgendes Beispiel, auf das wir in den weiteren Ausführungen immer wieder zurückgreifen werden, betrachtet werden: Ein Teilchen der Sorte 2 (Teilchen 2) sei am Ursprung gebunden. Von links her falle ein Teilchen der Sorte 1 (Teilchen 1) mit der Energie K_0^2 ein. Durch die Wechselwirkung des Teilchens 1 mit dem Teilchen 2 kann das Teilchen 1 entweder elastisch oder auch, falls $K_0^2 > B^2$ ist, unter Loslösung des Teilchens 2 vom Ursprung unelastisch gestreut werden. Dieses Problem wurde bereits früher mittels des Hamilton-Operators (1) ausführlich behandelt[6]; wir greifen daher für die Ergebnisse auf diese Arbeit — sie sei von jetzt ab mit I bezeichnet — zurück.

Zur Behandlung dieses Problems mittels des Hamilton-Operators (5) und der V.R. (6) benutzt man am besten die schon vorhin gebrauchte Darstellung der Eigenvektoren im Hilbert-Raum[7] und bestimmt mit ihrer Hilfe zunächst die zu diesem Problem gehörige Schrödinger-Gleichung. Nennen wir Ψ den Eigenvektor zu unserem Problem im Hilbert-Raum, so gilt für Ψ folgende Eigenwertsgleichung:

$$\bar{H}\Psi = E\Psi, \quad \{E = K_0^2 - B^2\}. \tag{7}$$

Da bei unserem Problem als einziger Umwandlungsprozeß die Umwandlung eines Teilchens der Sorte 2 in ein Teilchen der Sorte 3 und umgekehrt vorkommt, kann man Ψ in folgender Weise entwickeln:

$$\Psi = \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\, f(x_1 x_2)\, \varphi^{+}(x_1)\, \psi^{+}(x_2)\, \Psi_0 + \int \mathrm{d}x_1\, g(x_1)\, \varphi^{+}(x_1)\, D^{+}\Psi_0 . \tag{8}$$

Hierbei ist analog zu vorhin $\varphi^{+}(x_1)\,\psi(x_2)\,\Psi_0$ der Zustandsvektor für „ein Teilchen der Sorte 1 befindet sich am Ort x_1 und ein Teilchen der Sorte 2 am Ort x_2“ und $\varphi^{+}(x_1)\,D^{+}\Psi_0$ der Zustandsvektor für „ein Teilchen der Sorte 1 befindet sich am Ort x_1 und ein Teilchen der Sorte 3 am Ursprung“. Setzt man (8) in (7) ein, so erhält man unter Benutzung von (5) und den V.R. (6) ein gekoppeltes System von linearen Differentialgleichungen für die Schrödinger-Funktionale $f(x_1, x_2)$ und $g(x_1)$. Transformiert man dieses Gleichungssystem, analog zu der in I durchgeführten Weise, in den Impulsraum, so kann man in erster Näherung (bzgl. der Kopplungskonstanten A) zeigen, das $f(k_1 k_2)$ und $g(k_1)$ asymptotisch in die in I angeführten S-Matrixelemente erster Näherung übergehen. Es wird also

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{I}}^{\mathrm{as}}(k_1 k_2) &= (k_1 k_2 \,|\, S_{\mathrm{I}} \,|\, K_0 E_2) = \frac{iAN}{2} \left\{ \frac{-1}{(k_1 - K_0)\,(k_2 - K_0)} + \frac{iB\sqrt{E - k_1^2 - B^2 - K_0 k_1 - k_1^2}}{(k_2^2 + B^2)\,(k_1^2 + B^2)} \right\} \delta(k_1^2 + k_2^2 - E)\,,\\ g_{\mathrm{I}}^{\mathrm{as}}(k_1) &= (k_1 E_2 \,|\, S_{\mathrm{I}} \,|\, K_0 E_2) = \delta(k_1 - K_0) + iA\, \frac{-2B^2 - K_0 k_1 - K_0^2}{2\,(K_0^2 + B^2)}\, \delta(k_1^2 - K_0^2), \left\{ N = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, B^{\frac{3}{2}}, E_2 = -B^2 \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dieses Verhalten für die asymptotischen Wellenfunktionen muß natürlich auch gelten, wenn die Kopplungskonstante A streng und nicht nur näherungsweise berücksichtigt wird, da beide Methoden zur selben S-Matrix führen müssen. Auf den expliziten Nachweis der eben angeführten Behauptungen soll hier verzichtet werden, da die Rechnungen zu sehr umständlichen Ausdrücken führen, andererseits keine prinzipiellen Schwierigkeiten auftauchen.

Als nächstes sollen nun die wichtigsten Unterschiede des hier geschilderten Schemas zur üblichen Quantentheorie der Wellenfelder geschildert werden. Im wesentlichen handelt es sich dabei um folgende Unterschiede:

1) Die Teilchen der Sorte 3 sind nicht unabhängig von der Teilchensorte 2. Man kann auch sagen, die beiden Teilchensorten sind miteinander verwandt. Wie nachher erläutert wird, sind die in (5) und (6) unterstrichenen Glieder maßgebend für diese Verwandtschaft.
2) Die Teilchen 3 haben eine endliche Ausdehnung. Das hat zur Folge, daß die Wechselwirkung zwischen den Teilchen 1 und den unendlich schweren Teilchen am Ursprung nicht punktförmig ist. Das wird z. B. durch den Verschmierungsfaktor $e^{-B|x|}$ bei den Operatoren D und D^+ in (5) angezeigt.
3) Die Teilchensorte 2 besitzt eine direkte Wechselwirkung mit den unendlich schweren Teilchen am Ursprung — sie wird durch das Glied $-2B\psi^+(0)\psi(0)$ in (5) beschrieben. Das heißt, ihre Wechselwirkung mit diesen Teilchen wird nicht nur über die neueingeführte Teilchensorte 3 vermittelt, die nach vorhin das Analogon zu den Lichtquanten und Mesonen darstellt. In der Quantenelektrodynamik und den bisher untersuchten Mesonentheorien tauchen solche direkten Wechselwirkungskräfte nicht explizit auf, denn alle Wechselwirkungen z. B. zwischen den Spinorteilchen untereinander werden über die feldtragenden Teilchen, d. h. in unserer Sprechweise über die zusammengesetzten Teilchen vermittelt. In der Elektrodynamik z. B. wird dies durch den Wechselwirkungsansatz $\int j_\nu A_\nu \mathrm{d}\mathfrak{r}$ angezeigt. Die zusammengesetzten Teilchen (Lichtquanten und Mesonen) selbst werden dabei durch die direkten Wechselwirkungskräfte zusammengehalten, wie bereits früher erläutert wurde. Ein direkter Wechselwirkungsansatz für die Elektronen und Positronen in der Quantenelektrodynamik wäre z. B. $\int j_\nu^2 \mathrm{d}\mathfrak{r}$.

Zu 1): Die Verwandtschaft der Teilchensorte 2 mit der Teilchensorte 3 drückt sich zunächst darin aus, daß der Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator für die Teilchensorte 2 nicht mit dem Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator für die Teilchensorte 3 vertauschbar ist. Daher kommt es, daß z. B. der Zustand „ein Teilchen der Sorte 2 am Punkt x_2 vorhanden" nicht orthogonal ist zum Zustand „ein Teilchen der Sorte 3 am Ursprung vorhanden", sondern das skalare Produkt der zugehörigen Zustandsvektoren ergibt $\sqrt{B}\, e^{-B|x_2|}$. Der Vektor Ψ in (8) wurde also nach einem nichtorthogonalen Vektorsystem im Hilbert-Raum entwickelt und nur die Eigenvektoren, nach denen der asymptotische Anteil der Wellenfunktionen im Impulsraum entwickelt ist, bilden wieder ein orthogonales Vektorsystem.

Die eben erwähnte Nichtorthogonalität der obigen Zustände hat weiter zur Folge, daß $\psi^+(x_2)\Psi_0$ nicht den Zustandsvektor für ein freies Teilchen 2 (Teilchen 2 mit positiver Energie) am Ort x_2 darstellt, sondern in diesem Zustandsvektor ist auch ein Anteil enthalten, der zum Zustandsvektor „Teilchen 2 an den Ursprung gebunden", d. h. zu einem Zustandsvektor mit negativer Energie gehört — nach vorhin ist dieser Anteil gleich

$$e^{-B|x_2|} \int \sqrt{B}\, \mathrm{d}x_2'\, e^{-B|x_2'|}\, \psi^+(x_2')\Psi_0$$

[s. Gl. (3) und (4)] —. Es tauchen daher in (5) Glieder auf, die diese Anteile in den Zustandsvektoren für die Teilchensorte 2 wegkompensieren. Wie man sich nach den früheren Überlegungen leicht überzeugen kann, sind das die in (5) unterstrichenen Glieder. So bewirkt z. B. das Glied

$$B^2 \int \sqrt{B}\, e^{-B|x'|}\, \psi^+(x')\, \mathrm{d}x' \int \sqrt{B}\, e^{-B|x''|}\, \psi(x'')\, \mathrm{d}x''$$

in (5) für $A = 0$, daß die Eigenvektoren des Hamilton-Operators (5) keine Anteile enthalten, die zu den Zustandsvektoren „Teilchen der Sorte 2 an den Ursprung gebunden" gehören.

Aus Gl. (5) und (6) sieht man auch, daß in die Glieder, die die Verwandtschaft der beiden Teilchensorten 2 und 3 ausdrücken, ganz wesentlich die Form der direkten Wechselwirkung der Teilchen 2 mit dem Ursprung eingeht.

Um zu erkennen, was für Vernachlässigungen wir machen, wenn wir zum üblichen Formalismus der Quantentheorie der Wellenfelder zurückkehren, lassen wir die unterstrichenen Glieder in (5) für unsere weiteren Rechnungen weg und verlangen außerdem, daß ψ^+ und ψ mit D und D^+ vertauschbar sind. Die Ergebnisse, die wir jetzt erhalten, werden dann mit denjenigen Ergebnissen verglichen, die aus den Rechnungen mit dem Hamilton-Operator (5) und der V.R. (6) bzw., was damit gleichbedeutend ist, aus den Rechnungen mit dem Hamilton-Operator (1) und der V.R. (2) folgen.

Wir rechnen also von jetzt ab mit folgendem Hamilton-Operator und mit folgenden V.R.:

$$H_1 = \int \frac{\partial \varphi^+}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\partial \psi^+}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x - 2B\psi^+(0)\,\psi(0) - B^2 D^+ D$$
$$+ A \int \left\{ \psi^+(x)\,\psi(x) + \psi^+(x)\sqrt{B}\,e^{-B|x|} D + D^+ \sqrt{B}\,e^{-B|x|}\psi(x) + B\,e^{-2B|x|} D^+ D \right\} \cdot \varphi^+(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad (10)$$

$$[\varphi(x)\varphi^+(x')]_- = \delta(x-x'), \qquad [\psi(x)\psi^+(x')]_- = \delta(x-x'),$$
$$[\psi(x)D^+]_- = [D\psi^+(x)]_- = [\varphi(x)D^+]_- = [D\varphi^+(x)]_- = 0, \quad [D^+ D]_- = 1. \quad (11)$$

Die übrigen in (10) auftretenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind wieder miteinander vertauschbar.

Wir behandeln nun dasselbe Problem, dessen Durchrechnung mittels des Hamilton-Operators (5) und der V.R. (6) wir vorhin skizziert haben, mittels des Hamilton-Operators (10) und der V.R. (11).

Entwickelt man den Eigenvektor Ψ' zu unserem Problem in derselben Weise wie den Eigenvektor Ψ in (8), so erhält man jetzt folgendes gekoppeltes System von linearen Differentialgleichungen für die Schrödinger-Funktionale $f(x_1 x_2)$ und $g(x_1)$:

$$-\frac{\partial^2 f(x_1 x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f(x_1 x_2)}{\partial x_2^2} - 2B\,\delta(x_2) f(x_1 x_2) + A\,\delta(x_1 - x_2) f(x_1 x_2) + A\sqrt{B}\,e^{-B|x_2|}\delta(x_2 - x_1) g(x_1) = E f(x_1 x_2),$$
$$-\frac{\partial^2 g(x_1)}{\partial x_1^2} - B^2 g(x_1) + A\sqrt{B}\,e^{-B|x_1|} f(x_1 x_1) + A\,B\,e^{-2B|x_1|} g(x_1) = E g(x_1). \quad (12)$$

Zur Lösung von (12) ist es wieder zweckmäßig, diese Gleichungen in den Impulsraum zu transformieren, da man dort keine Grenzbedingungen wie im Ortsraum — sie werden durch das Auftreten der δ-Funktionen bedingt — zu erfüllen hat. Diese Transformation ergibt analog zu der in I durchgeführten Transformation:

$$(k_1^2 + k_2^2 - E) f(k_1 k_2) - \frac{B}{\pi}\int f(k_1 k_2)\,\mathrm{d}k_2 + \frac{A}{2\pi}\int f(k_1 - k,\ k_2 + k)\,\mathrm{d}k$$
$$+ \frac{A}{2\pi}\int \frac{N}{k^2 + B^2}\, g(k_1 + k_2 - k)\,\mathrm{d}k = 0, \quad (13)$$
$$(k_1^2 - B^2 - E)\, g(k_1) + \frac{A}{2\pi}\int \frac{N}{k^2 + B^2} f(k + k_1 - k', k')\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k' + A\int \frac{N^2}{B}\frac{g(k_0 k_1)}{k^2 + 4B^2}\,\mathrm{d}k = 0.$$

Um diese Gl. in erster Näherung (bzgl. der Kopplungskonstanten A) zu lösen, nehmen wir an, daß in 0-ter Näherung ($A = 0$) ein Teilchen der Sorte 3 am Ursprung und ein Teilchen der Sorte 1 mit dem Impuls K_0 vorhanden ist. Das heißt, es ist $f_0(k_1 k_2) = 0$ und $g_0(k_1) = \delta(k_1 - K_0)$. Analog zu der in I durchgeführten Methode erhalten wir dann:

$$f_1(k_1 k_2) = \frac{A\,N}{2\pi\,(k_1^2 + k_2^2 - E)}\left\{\frac{-1}{(k_1 + k_2 - K_0)^2 + B^2} + \frac{i B\sqrt{E - k_1^2 - B^2} - K_0 k_1 - k_1^2}{2\,(k_1^2 - K_0^2)\,(k_1^2 + B^2)}\right\},$$
$$g_1(k_1) = \delta(k_1 - K_0) + A\,\frac{N^2}{B}\,\frac{-1}{(k_1^2 - K_0^2)}\,\frac{1}{(k_1 - K_0)^2 + 4B^2}. \quad (14)$$

Spaltet man in (14) die asymptotischen Anteile der Wellenfunktionen ab, d. h. geht man zur S-Matrix über, so werden die Ausdrücke (14) mit den Ausdrücken (9) identisch.

Will man noch die zweite Näherung ausrechnen, so werden die Rechnungen bereits sehr umständlich und die Ergebnisse vor allem sehr unübersichtlich. Es wurde daher noch ein etwas abgeändertes Modell durchgerechnet, das den Vorteil hat, daß es sich streng integrieren läßt. Da die Vernachlässigungen, die bis jetzt gemacht wurden, im Prinzip davon herrühren, daß gewisse Glieder weggelassen wurden, die in erster Linie für die Wechselwirkung der Teilchensorte 2 mit dem Ursprung und für ihre Verwandtschaft mit der Teilchensorte 3 maßgebend sind, wurde die Wechselwirkung der Teilchensorte 1 mit der Teilchensorte 2 und 3 in diesem Modell so abgeändert, daß eine Wechselwirkung zwischen diesen Teilchensorten nur dann stattfindet, wenn sich die Teilchen der Sorte 2 (bzw. der Sorte 3) am Ursprung befinden. Es wurde also im wesentlichen in der ursprünglichen Ausgangsgleichung (1)

$$A\int \psi^+(x)\,\psi(x)\,\varphi^+(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

durch $A \int \delta(x) \psi^+(x) \psi(x) \varphi^+(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x$ ersetzt. In Wirklichkeit ist die getroffene Abänderung etwas komplizierter, um Divergenzschwierigkeiten zu vermeiden. Die zugehörigen Rechnungen sollen hier nicht angegeben werden, da man dieses Modell für die späteren Betrachtungen, die sich mit der endlichen Ausdehnung der Teilchensorte 3 befassen, nicht mehr gebrauchen kann. Es werden daher nur die Ergebnisse geschildert.

Vergleicht man analog zu vorhin die Rechnung, bei der die Verwandtschaftsglieder vernachlässigt werden, mit der Rechnung, bei der diese Glieder mitberücksichtigt werden, so ergibt sich folgendes:

Beide Rechnungen stimmen um so besser miteinander überein, je kleiner die Wechselwirkung zwischen den Teilchen 1 und 2 gegenüber der direkten Wechselwirkung der Teilchen 2 mit dem Ursprung ist — die letztere ist für die Bindung der Teilchen 2 am Ursprung verantwortlich. Das gleiche gilt, wenn die Energien der stoßenden Teilchen groß gegenüber der Bindungsenergie der Teilchen 2 am Ursprung sind. Das ist auch verständlich, denn für große Impulse der ionisierten Teilchen 2 wird der Zustand „ein ionisiertes Teilchen 2 vom Impuls k_2 vorhanden" annähernd orthogonal zum Zustand „ein Teilchen 2 an den Ursprung gebunden" [das skalare Produkt der beiden Zustände ergibt

$$N/(k_2^2 + B^2)] \, .$$

Wendet man dieses Ergebnis z. B. auf die Quantenelektrodynamik an ($E \ll \mu_{\pi\text{-Meson}} \cdot c^2$), so muß man die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und dem elektromagnetischen Feld mit der direkten Wechselwirkung der Teilchen und Antiteilchen im Lichtquant — sie ist für die Bindung der Teilchen und Antiteilchen im Lichtquant verantwortlich — vergleichen. Dabei können wir als Maß für die Wechselwirkung der Lichtquanten mit den Elektronen die Bindungsenergie des Positroniums ansehen, da die Bindung des Positrons und Elektrons im Positronium durch ihr Coulomb-Feld, d. h. durch ihr longitudinales Lichtquantenfeld vermittelt wird. Bekanntlich liegt diese Bindungsenergie in der Größenordnung von 10 eV. Analog dazu kann man als Maß für die direkten Wechselwirkungskräfte, die Bindungsenergie der Teilchen und Antiteilchen im Lichtquant benützen, die, wie später gezeigt wird, die Größenordnung 10^9 eV hat. Das Verhältnis dieser beiden Bindungsenergien wird daher größenordnungsmäßig 10^{-8}, also sehr klein. Man sieht daraus, daß der Einfluß der Verwandtschaft der Lichtquanten mit den Elektronen auf die Quantenelektrodynamik vernachlässigbar klein ist, und auch kaum im Lamb-Shift festgestellt werden kann.

Für die Mesonentheorien ergibt das dazu analoge Verhältnis 10^{-2} bis 10^{-3}. Hier vergleicht man die Kernbindungsenergien (Größenordnung 5 MeV) mit der Bindungsenergie der Nukleonen in den Mesonen (Größenordnung 10^9 eV) (s. später). Also auch hier ist der Einfluß der Verwandtschaft zwischen feldtragenden und felderzeugenden Teilchen verhältnismäßig klein. Aber man kann erwarten, daß diese Verwandtschaft, falls man die richtige Mesonentheorie gefunden hat, sich doch in kleinen Abweichungen bemerkbar macht, solange, z. B. bei Streuprozessen, die Stoßenergien der Teilchen im Schwerpunktssystem klein bzw. von derselben Größenordnung wie die Bindungsenergien der Nukleonen in den Mesonen sind.

An dieser Stelle sei noch auf einen Punkt aufmerksam gemacht, der von Interesse ist. In I wurde gezeigt, daß zwischen dem S-Matrixelement, das die elastische Streuung der Teilchen 1 an den am Ursprung gebundenen Teilchen 2 (Teilchen 3) beschreibt, und demjenigen S-Matrixelement, das die Ionisation der Teilchen 2 durch die Teilchen 1 beschreibt, folgende Beziehung besteht:

$$(k_1 E_2 \,|\, S \,|\, K_0 E_2) = -\frac{1}{N} \frac{k_{2B}}{\pi} \oint\limits_{i\,|k_{2B}|} (k_1 k_2 \,|\, S \,|\, K_0 E_2) \, \mathrm{d}k_2 \, , \quad \{|k_{2B}| = B\} \, . \tag{15}$$

Wie man aus dem exakt integrierbaren Beispiel ersehen kann, und wie sich auch für das durch Gl. (10) ff. definierte Beispiel z. B. aus Gl. (13) ablesen läßt, bleibt diese Beziehung trotz der obigen Vernachlässigungen exakt bestehen. Das Entsprechende gilt für die Beziehung, die das Matrixelement, das die reine Streuung der Teilchen 1 und 2 aneinander und am Ursprung beschreibt, mit dem Matrixelement verbindet, das den Einfang des Teilchens 2 am Ursprung beschreibt[6]. Weiterhin bleibt auch die Tatsache exakt bestehen, daß man die Energie des gebundenen Teilchens 2, d. h. in unserer Sprechweise, die Energie des Teilchens 3, aus dem Phasenfaktor für die Streuung des Teilchens 2 am Ursprung ($A = 0$) durch Fortsetzung zu negativen Energiewerten gewinnen kann[8].

[8] W. Heisenberg, Z. Naturforschg. **1**, 608 [1946]; K. Wildermuth, Z. Physik **127**, 85 [1949].

Zu 2): Sämtliche wesentlichen Wechselwirkungsansätze, die bis jetzt in der Quantenelektrodynamik und insbesondere in letzter Zeit in den renormalisierbaren Mesonentheorien [9] untersucht wurden, setzen eine punktförmige Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Teilchensorten voraus. Das heißt, die Teilchen der verschiedenen Sorten, wie z. B. die Lichtquanten und Elektronen, treten nur dann miteinander in Wechselwirkung, wenn sie sich an derselben Stelle im Raum befinden. Man kann auch sagen, die wechselwirkungsfreien Lichtquanten und Elektronen bzw. wechselwirkungsfreien Mesonen und Nukleonen werden in diesen Theorien als punktförmig angenommen.

Im Gegensatz dazu haben in unserem Modell eines Wellenfeldes die Teilchen der Sorte 3 eine endliche Ausdehnung von der Größenordnung $2/B$, wie sich z. B. aus der Gl. (3) entnehmen läßt. Diese endliche Ausdehnung hat zur Folge, daß die Wechselwirkung der Teilchen 3 mit den Teilchen 1 und 2 nicht mehr punktförmig, sondern über einen Bereich von der Größenordnung $2/B$ verschmiert ist. Mathematisch drückt sich das dadurch aus, daß z. B. die 4 letzten Glieder in (10) integrale Wechselwirkungen über einen Bereich von der Größenordnung $2/B$ darstellen, obwohl die Teilchen der Sorte 3 nur am Ursprung vorkommen.

Man kann nun versuchen, um die Ähnlichkeit zu den gewöhnlichen Wellentheorien möglichst groß zu machen, diese integralen Wechselwirkungen durch punktförmige Wechselwirkungen anzunähern. Dazu entwickelt man in diesen 4 Gliedern $\varphi^+(x)$, $\varphi(x)$, $\psi^+(x)$, $\psi(x)$ in Taylor-Reihen nach Potenzen von x; man kann dann in diesen Gliedern die Integrationen über x ausführen. Als Beispiel betrachten wir das letzte Glied in (10). Machen wir für $\varphi^+(x)$ und $\varphi(x)$ den eben erwähnten Ansatz

$$\varphi^+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varphi^+(0)}{\partial x^n} x^n$$

und (16)

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varphi(0)}{\partial x^n} x^n,$$

so wird

$$\int B\, e^{-2B|x|} D^+ D \varphi^+(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = D^+ D \Big\{ \varphi^+(0)\, \varphi(0) + \frac{1}{8B^2}\Big(\varphi^+(0) \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^+(0)}{\partial x} \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi^+(0)}{\partial x^2} \varphi(0) + \dots \Big\}. \quad (17)$$

Man erkennt aus diesen Ausführungen zunächst, daß die Einführung von Teilchen endlicher Ausdehnung in die Quantentheorie der Wellenfelder, damit gleichbedeutend ist, daß man entweder integrale Ansätze als Wechselwirkungsdichte oder aber, daß man Ableitungen unendlich hoher Ordnung der Wellenfunktionen in den Wechselwirkungsansatz einführt.

Betrachtet man die Auswirkung dieser Taylor-Entwicklung auf die Schrödinger-Gln. (12) und (13), so zeigt sich, daß in den Wechselwirkungsgliedern in (12) jetzt beliebig hohe Ableitungen der f- und g-Funktionen auftreten, während in (13) Potenzreihenentwicklungen nach k/B auftauchen.

Für kleine Impulse der einfallenden Teilchen 1, d. h. so lange die De-Broglie-Wellenlänge der einfallenden Teilchen 1 groß gegenüber dem Durchmesser der Teilchen 3 ist, wird es in 1. Näherung genügen, wenn man nur die ersten Glieder dieser Reihenentwicklungen berücksichtigt, denn man kann dann die Wellenfunktion der Teilchen 1 im Ortsraum als konstant über die Ausdehnung des Teilchens 3 ansehen. Berechnet man in dieser Näherung z. B. $g(k_1)$ und $f(k_1 k_2)$ aus (13), so erhält man

$$g_{\mathrm{I}}(k_1) = \delta(k_1 - K_0) + \frac{A N^2}{B} \frac{1}{4B^2} \frac{-1}{k_1^2 - K_0^2},$$
$$f_{\mathrm{I}}(k_1 k_2) = \frac{A N}{2\pi\,(k_1^2 + k_2^2 - E)} \Big\{ -\frac{1}{B^2} + \frac{i B \sqrt{E - k_1^2 - B^2}}{(k_1^2 - K_0^2) \cdot B^2} \Big\}. \quad (18)$$

Durch Vergleich mit (14) sieht man, daß für kleine Einfallsenergien der Teilchen 1 die elastische Streuung der Teilchen 1 annähernd richtig beschrieben wird. Dagegen läßt sich die Erzeugung von Teilchen 2, wie ebenfalls der Vergleich mit (14) zeigt, sogar wenn die Einfallsenergie K_0^2 nur wenig größer als die Bindungsenergie B^2 der Teilchen 3 ist, d. h. die erzeugten Teilchen 2 sind sehr energiearm, auch nicht mehr näherungsweise richtig beschreiben. Das ist verständlich, da für die Erzeugung von Teilchen 2 die De-Broglie-Wellenlänge der einfallenden Teilchen 1 — sie ist in unserem Maß-System gleich $2\pi/K_0$ — von der Größenordnung des Durchmessers der Teilchen 3 ist.

[9] F. J. Dyson, Physic. Rev. **75**, 486, 1736 [1949]; P. T. Matthews, Physic. Rev. **81**, 936 [1951]. Dort finden sich auch weitere Literaturangaben.

Wenden wir die eben durchgeführten Betrachtungen z. B. auf die Mesonentheorie an, so können wir folgern, daß die bisher untersuchten Mesonentheorien versagen müssen — bei Gültigkeit der hier zugrunde gelegten Vorstellungen —, wenn die Energien der Nukleonen so groß werden, daß ihre De-Broglie-Wellenlängen in die Größenordnung des Durchmessers der Mesonen gelangen. Um den Gültigkeitsbereich dieser Theorien abgrenzen zu können, muß man also zunächst den Durchmesser der Mesonen abzuschätzen versuchen.

Zur Durchführung dieser Abschätzung betrachten wir ein Spinorteilchen der Ruhmasse μ, das mittels einer Kraft sehr kurzer Reichweite an ein Teilchen sehr großer Masse gebunden sei. Das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion des Spinorteilchens wird dann in einer Entfernung, in der die Kraft von kurzer Reichweite bereits abgeklungen ist, durch eine Dirac-Gleichung der Form

$$\left\{-\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\,\alpha_k\frac{\partial}{\partial x_k} + \mu c \beta\right\}\psi = 0 \qquad (19)$$

beschrieben. Für einen stationären Zustand der Energie E muß der exponentielle Anteil der Wellenfunktion ψ dann bekanntlich die Form[10]

$$e^{-(i/\hbar)Et}\, e^{-r/a} \qquad (20)$$

haben, wobei a mit E durch die Beziehung

$$a = \hbar / \sqrt{\mu^2 c^2 - (E^2/c^2)} \qquad (21)$$

verknüpft ist. Wie man aus (20) sieht, hat der Bindungszustand des hier betrachteten Systems größenordnungsmäßig den Durchmesser $2a$. Betrachtet man ein System von 2 Teilchen gleicher Masse in ihrem Schwerpunktssystem, so ändert sich an der Formel (21) nichts weiter, als daß jetzt μ durch die Ruhmasse beider Teilchen, also durch $\overline{\mu} = 2\mu$ zu ersetzen ist. Man kann daher bei Kenntnis der Ruhenergie des stationären Zustands und der Ruhmasse der freien Teilchen auf den größenordnungsmäßigen Durchmesser des zusammengesetzten Teilchens im Ruhsystem schließen.

Wendet man die Formel (21) auf das π-Meson an, setzt also $\overline{\mu} = 2\mu_{\text{Nukleon}}$ und $E/c^2 = \mu_{\pi\text{-Meson}}$, so wird $2a$ größenordnungsmäßig 10^{-14} bis 10^{-13} cm. Das ist aber dieselbe Größenordnung, die die Reichweite der Kernkräfte besitzt. Man kann daher nicht erwarten, wie bereits vorhin angedeutet wurde, daß die bisher untersuchten Mesonentheorien Ergebnisse liefern, die mit den experimentellen Ergebnissen quantitativ übereinstimmen. Die Mesonentheorie muß daher zumindest in der Weise erweitert werden, daß man zu einer Integralgleichungstheorie oder, was damit gleichbedeutend ist, zu einer Differentialgleichungstheorie unendlich hoher Ordnung übergeht.

Will man die eben geschilderte Methode zur Abgrenzung des Gültigkeitsbereichs der Quantenelektrodynamik benützen, so treten hier zwei Besonderheiten auf, die diese Abschätzung erschweren. Erstens besitzen die Lichtquanten wegen ihrer Ruhmasse 0 immer Lichtgeschwindigkeit. Sie sind daher im Rahmen der hier zugrunde gelegten Vorstellungen wegen der Lorentz-Kontraktion als unendlich dünne Scheiben senkrecht zu ihrer Fortpflanzungsrichtung anzusehen. Zweitens ist hauptsächlich nach den Überlegungen von Heisenberg[2, 11] zu vermuten, daß das Lichtquant nicht nur als aus Positron und Elektron, sondern mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch aus Proton und Antiproton usw., d. h. aus den schweren Elementarteilchen, zusammengesetzt zu betrachten ist. Diese Vorstellung hat zur Folge, wie man sich an Hand von (21) leicht überlegen kann, daß auch der Durchmesser des Lichtquants senkrecht zu seiner Fortpflanzungsrichtung kleiner wird, als wie wenn es nur aus Positron und Elektron zusammengesetzt ist. Bei Zugrundelegung der in Anm. 11 erwähnten Vorstellung, die Mesonen mit ganzzahligem Spin als angeregte Zustände der Lichtquanten zu betrachten, würde sogar herauskommen, daß dieser Durchmesser kleiner als der Durchmesser des π-Mesons ist.

Die experimentellen Untersuchungen zur Paarerzeugung zeigen nun, daß die Erzeugung von Elektron-Positronpaaren bis herauf zu den höchsten bisher gemessenen Energien, d. h. bis zu mehreren Millionen Elektronenvolt, durch die Quantenelektrodynamik richtig beschrieben wird. Die zu diesen Energien gehörige De-Broglie-Wellenlänge der Elektronen liegt in der Größenordnung von 10^{-11} cm, also unterhalb des Durchmessers eines Teilchens der Ruhmasse 0, das nur aus Positron und Elektron zusammengesetzt ist ($\sim 10^{-11}$ bis 10^{-10} cm). Man kann daher diese experimentellen Ergebnisse als einen

[10] Vgl. z. B.: P. A. M. Dirac, Die Prinzipien der Quantenmechanik, S. Hirzel, Leipzig 1930, und sämtliche englischen Ausgaben.

[11] K. Wildermuth, Z. Naturforschg. **5a**, 373 [1950].

Hinweis auf die komplexe Struktur der Lichtquanten und Mesonen in Richtung der in den unter Anm. 1 und 11 zitierten Arbeiten geschilderten Art auffassen.

Zu 3): Wie bereits erläutert wurde, erscheinen in der Quantenelektrodynamik bzw. in den üblichen Mesonentheorien die direkten Wechselwirkungskräfte zwischen den Spinorteilchen nicht explizit. Im Gegensatz dazu tritt in unserem Modell eines Wellenfeldes solch eine direkte Wechselwirkung z. B. zwischen den Teilchen 2 und den unendlich schweren Teilchen am Ursprung explizit auf. Sie wird nach vorhin dargestellt durch das Glied $-2B\psi^+(0)\psi(0)$ in (12). Ihm entspricht in (13) das Glied

$$-\frac{B}{\pi}\int f(k_1 k_2)\,\mathrm{d}k_2 .$$

Um den Einfluß dieses Gliedes auf die Rechnung erkennen zu können, bezeichnen wir B/π mit $\overline{B}$ und lösen dann (13) durch sukzessive Entwicklung nach Potenzen von A und $\overline{B}$. Bei dieser Entwicklung gehen zunächst die vorher geschilderten analytischen Zusammenhänge zwischen den einzelnen S-Matrixelementen [s. Gl. (15)] vollständig verloren, da diese Zusammenhänge im wesentlichen dadurch bedingt werden, daß z. B. in dem hier geschilderten Beispiel $f_{\text{as}}(k_1 k_2)$ für $k_2 = i\pi\overline{B} = iB$ eine Singularität besitzt [s. Gl. (9)]. Solch eine Singularität macht sich bekanntlich in einer Potenzreihenentwicklung (nach $\overline{B}$) dadurch bemerkbar, daß die Reihenentwicklung in der Nähe dieser Singularität divergiert [6]. Ebenso gehen in dem Phasenfaktor für die Streuung der Teilchen 2 am Ursprung ($A = 0$) die Nullstellen für $\sqrt{E} = i\pi\overline{B} = iB$ im Zähler und Nenner durch diese Reihenentwicklung nach Potenzen von $\overline{B}$ verloren. Andererseits läßt sich gerade aus diesen Nullstellen die Bindungsenergie der Teilchen 2 am Ursprung bestimmen [8].

Vernachlässigt man die direkte Wechselwirkung der Teilchen 2 mit den unendlich schweren Teilchen am Ursprung, so zeigt sich auch hier durch Vergleich mit Gl. (14), daß diese Vernachlässigung nur gerechtfertigt ist, solange die De-Broglie-Wellenlänge der einfallenden Teilchen 1 groß gegenüber dem Durchmesser des Teilchens 3 ist. Allerdings darf dieses Ergebnis nicht zu ernst genommen werden, da bei eindimensionalen Beispielen die Teilchen einander nicht ausweichen können, während im dreidimensionalen Raum ein Ausweichen möglich ist. Daher ist zu erwarten, daß bei dreidimensionalen Beispielen der Einfluß solch einer direkten Wechselwirkung auf Streuvorgänge viel geringer sein wird.

Wendet man diese Betrachtungen wieder auf die Quantenelektrodynamik und Mesonentheorie an, so sieht man zunächst, daß der Einfluß der in diesen Theorien weggelassenen direkten Wechselwirkungsglieder zumindest so lange vernachlässigt werden kann, wie die De-Broglie-Wellenlänge der stoßenden Teilchen größer als der Durchmesser der Lichtquanten bzw. Mesonen ($\sim 10^{-13}$ cm) ist. Das heißt in anderen Worten, diese Glieder machen sich erst bei Energien bemerkbar, bei denen auch die endliche Ausdehnung der feldtragenden Teilchen wesentlich wird.

Andererseits hat die Vernachlässigung dieser direkten Wechselwirkungsglieder zur Folge, daß man nicht erwarten kann, daß in der Quantenelektrodynamik und Mesonentheorie in ihrer heutigen Form analytische Zusammenhänge der vorhin angedeuteten Art [s. Gl. (15)] bestehen. Das heißt z. B. die S-Matrixelemente, die die reine Streuung von Elektronen an Lichtquanten beschreiben, sind nicht mit den S-Matrixelementen, die die Erzeugung von Elektron-Positronpaaren unter Vernichtung von Lichtquanten beschreiben, durch Beziehungen der obigen Art [s. Gl. (15)] miteinander verknüpft.

Aus all diesen Überlegungen ist zu sehen, daß man bereits aus der unrelativistischen Quantenmechanik einen ersten Aufschluß über die innere Struktur der relativistischen Quantentheorie der Wellenfelder und ihre eventuelle Weiterentwicklung gewinnen kann. Es ist allerdings notwendig, um die hier gewonnenen Erkenntnisse und Vermutungen weiter zu festigen und auszubauen, daß noch mehr Beispiele und vor allem auch dreidimensionale Beispiele untersucht werden.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß nach unseren Vorstellungen in der Theorie der Elementarteilchen die direkten Wechselwirkungskräfte zwischen den felderzeugenden Teilchen eine wesentliche Rolle spielen werden. Wie sich gezeigt hat, sind diese Kräfte z. B. dafür verantwortlich, daß sich diese Teilchen zu zusammengesetzten Teilchen (Lichtquanten, Mesonen) verbinden können, deren Durchmesser in der Größenordnung von 10^{-13} cm liegt. Solche direkten Wechselwirkungskräfte treten gar nicht im Formalismus der Quantenelektrodynamik bzw. Mesonentheorie explizit auf. Vielmehr erscheinen nur solche Kräfte, die zwischen den felderzeugenden Teilchen über das Feld der zusammengesetzten Teilchen vermittelt werden. Diese sekundären Kräfte stellen daher eine integrale Beschreibung der direkten Wechselwirkungskräfte (die sehr kurze Reichweite haben) dar. Ähnlich wie man in der Elastizitätstheorie die elastischen Kräfte als eine integrale Zusammenfassung der atomaren Kristallkräfte auffassen kann. In diesem Sinn ist die Quantentheorie der Wellenfelder als eine phänomenologische Theorie aufzufassen, die durch Mittelung über Raum-Zeit-Bereiche entsteht, deren lineare Abmessungen viel größer als 10^{-13} cm (Größenordnung der kleinsten Länge) sind. Man kann daher aus der Quantenelektrodynamik auch keinen unmittelbaren Aufschluß über diese direkten Wechselwirkungskräfte erhalten, die in ihrer Beschreibungsweise ganz erheblich von den bisher behandelten Kräften abweichen können. So kann es nach Heisenberg[2] z. B. sein, daß diese Kräfte sich in Raum-Zeit-Bereichen von der Größenordnung der kleinsten Länge mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Das bedeutet, daß die Beschreibung dieser Kräfte in diesen Bezirken erheblich vom kausalen Schema der üblichen relativistischen Hamilton-Theorie abweicht. Man muß nur verlangen, daß bei Mittelung über Raum-Zeit-Bereiche, die groß gegenüber 10^{-13} cm sind, bei niederen Energien wieder die Quantenelektrodynamik in ihrer üblichen Form (d. h., daß sie dem kausalen Schema des Relativitätsprinzips genügt[12]) herauskommt. Als erste Versuche, in dieser Richtung weiterzuschreiten, seien die Arbeiten von Heisenberg[2], Yukawa[13] und in letzter Zeit von Möller-Kristensen[14] genannt.

Zum Schluß soll noch kurz auf die Frage eingegangen werden, wie man möglicherweise diese direkten Wechselwirkungskräfte mittels eines relativistisch invarianten Schemas beschreiben kann.

Die oben angegebene Forderung (bei kleinen Energien kausales Schema des Relativitätsprinzips) sowie die Gültigkeit der üblichen Erhaltungssätze (Energie-Impulserhaltungssatz usw.) lassen sich z. B. mit jedem Lagrange-Formalismus erfüllen, dessen Wechselwirkungsterm ein beliebiger relativistisch invarianter Integralterm ist. Es muß nur gefordert werden, daß dieser Term eine Kräfteausbreitung beschreibt, die nur in einem Raum-Zeit-Bereich von der Größenordnung der kleinsten Länge von 0 verschieden ist. Die Kräfte bzw. Wirkungen über große Entfernungen kommen dadurch zustande, daß einerseits die Lichtquanten der Energie 0 des Vakuums durch Vermittlung der direkten Wechselwirkungskräfte polarisiert werden (Coulomb-Kräfte), wie zu Beginn erläutert wurde, und andererseits diese Lichtquanten durch reelle Teilchen (mittels dieser direkten Wechselwirkungskräfte) angestoßen werden und zu reellen Teilchen mit endlicher Energie (Lichtquanten, Elektron-Positronpaare usw.) umgewandelt werden. Da diese Teilchen sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können, ist für kleine Energien automatisch das kausale Schema der Relativitätstheorie gewahrt.

Ein einfacher hermitischer Wechselwirkungsansatz der obigen Art für Spinorteilchen lautet z. B.

$$I = \int L_{\mathrm{w}} \, \mathrm{d}t = B \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}(x_\nu{}^1) \, \psi(x_\nu{}^2) \, \overline{\psi}(x_\nu{}^3) \, \psi(x_\nu{}^4) \quad (22)$$

$$g(x_\nu{}^1, x_\nu{}^2, x_\nu{}^3, x_\nu{}^4) \, \mathrm{d}x_\nu{}^1 \, \mathrm{d}x_\nu{}^2 \, \mathrm{d}x_\nu{}^3 \, \mathrm{d}x_\nu{}^4 .$$

Hierbei ist $g(x_\nu, x_\nu{}', x_\nu{}'', x_\nu{}''')$ ein relativistisch invarianter Formfaktor, der auch raumartige Anteile enthalten kann. Es muß nur nach vorhin verlangt werden, daß für

$$\sqrt{(x_\nu{}^\tau - x_\nu{}^\sigma)^2} \gg 10^{-13} \text{ cm } g(x_\nu{}^1, x_\nu{}^2 \ldots) \text{ gegen 0 geht.}$$

Der Wechselwirkungsansatz (22) hat rein äußerlich sehr viel Ähnlichkeit mit den in letzter Zeit von Möller und Kristensen[14] vorgeschlagenen Wechselwirkungsansätzen. Aber es besteht folgender prinzipieller Unterschied:

In der Möller-Kristensenschen Theorie werden die felderzeugenden wie die feldtragenden Teilchen wie in den gewöhnlichen Feldtheorien unabhängig voneinander in die Theorie eingeführt und nur die Wechselwirkung zwischen diesen Teilchen wird (gegenüber diesen Feldtheorien) in Raum- und Zeitrichtung verschmiert, wobei ebenfalls darauf geachtet wird, daß für kleine Energien die Wechselwirkung zwischen den Teilchen korrespondenzmäßig wieder in eine punktförmige Wechselwirkung übergeht.

In dem hier diskutierten Schema wird dagegen die direkte Wechselwirkung zwischen den Spinorteilchen betrachtet, die für die Bindung der Spinorteilchen in den Feldteilchen verantwortlich ist. Erst die Wechselwirkung zwischen den Spinorteilchen und diesen Feldteilchen entspricht dann den nicht lokalisierbaren Wechselwirkungen der Möller-Kristensenschen Theorie.

[12] M. Fierz, Helv. physica Acta [1951].

[13] Yukawa, Physic. Rev. **77**, 219 [1950]; **80**, 1047 [1951].

[14] P. Kristensen u. C. Möller, On a convergent Meson Theory, I. Dansk Mat. Fys. Medd. **27**, Nr. 7 [1952].

Da man in dem hier diskutierten Schema für den Übergang zur Quantentheorie der Wellenfelder (Korrespondenzprinzip) zunächst gebundene Zustände zur Darstellung der feldtragenden Teilchen in die Theorie einführen muß, wird die Struktur der direkten Wechselwirkungskräfte bei diesem Übergang sehr stark verwischt. Daher hat man in der Wahl der konvergenten Ansätze für diese Kräfte zunächst einen sehr weiten Spielraum. Andererseits gestattet es dieser Spielraum, daß man für die ersten Untersuchungen die relativistisch invarianten Wechselwirkungsterme relativ einfach wählen kann, um die mathematische Struktur solch eines Formalismus und seine prinzipiellen physikalischen Eigenschaften (z. B. gebundene Zustände) studieren zu können. Später muß dann versucht werden, die Lagrange-Funktionen so zu wählen, daß man die in der Natur vorkommenden Teilchen richtig beschreiben kann.

Spezielle Modelle werden zur Zeit durchgerechnet.

Herrn Prof. Friedrichs und Herrn Dr. Zumino (New York University) danke ich vielmals für ihre Anregungen während der Entstehung der Arbeit. Ebenso bin ich Herrn Prof. Heisenberg für anregende Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Anm. b. d. Korr.: Inzwischen scheint es dem Verfasser, hauptsächlich nach Diskussionen mit Herrn Prof. Heisenberg, plausibel, daß die Divergenzen in der Quantentheorie der Wellenfelder bereits durch speziell gewählte, lokale, nichtlineare Ansätze für die direkten Wechselwirkungskräfte zum Verschwinden gebracht werden können. Dafür scheinen auch sehr stark physikalische Argumente über das Verhalten hochenergetischer Nukleonen ($E > 10^{11}$ eV) bei Stoßprozessen zu sprechen.

Eine graphische Darstellung der Energietal-Fläche

Auf Grund der neueren Isotopenmassen-Bestimmungen

Von Heinz Ewald

Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. **8a**, 116—120 [1953]; eingegangen am 3. November 1952)

Die in den letzten Jahren veröffentlichten Neumessungen und -berechnungen von Isotopenmassen werden verwendet, um eine graphische Darstellung der Talsohle der Energietalfläche der Atomkerne zu gewinnen. Die magischen Neutronenzahlen 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 markieren sich als Verwerfungen und Neigungsänderungen in dem sonst als ziemlich glatt anzunehmenden Verlauf der Fläche. Die magischen Protonenzahlen scheinen dagegen nur weniger Einfluß zu haben.

In den letzten 4 Jahren sind Neumessungen und -berechnungen von Isotopenmassen in größerer Anzahl bei kleinen und in geringerer Anzahl auch bei größeren Massenzahlen erhalten worden[1–33]. Abgesehen von den genaueren Messungen im Bereich der Massenzahlen 1 bis 40 werden für die meisten Ergebnisse zwischen $\pm$ 0,1 und $\pm$ 1 mME liegende wahrscheinliche Fehler angegeben. Zum

[1] K. Ogata, Physic. Rev. **75**, 200 [1949].
[2] W. Low u. C. H. Townes, Physic. Rev. **75**, 529 [1949].
[3] A. E. Shaw, Physic. Rev. **75**, 1011 [1949].
[4] H. E. Duckworth, Physic. Rev. **76**, 690 [1949].
[5] J. Mattauch u. A. Flammersfeld, Isotopenbericht 1949, Sonderheft der Z. Naturforschg.
[6] M. O. Stern, Rev. mod. Physics **21**, 316 [1949].
[7] S. Geschwind, H. Minden u. C. H. Townes, Physic. Rev. **78**, 174 [1950].
[8] H. E. Duckworth u. H. A. Johnson, Physic. Rev. **78**, 179 [1950].
[9] H. E. Duckworth, H. A. Johnson, R. S. Preston u. R. F. Woodcock, Physic. Rev. **78**, 386 [1950].
[10] H. E. Duckworth, K. S. Woodcock u. R. S. Preston, Physic. Rev. **78**, 479 [1950].
[11] H. E. Duckworth, R. S. Preston u. K. S. Woodcock, Physic. Rev. **79**, 188 [1950].
[12] C. H. Townes u. W. Low, Physic. Rev. **79**, 198 [1950]; **80**, 608 [1950].
[13] H. E. Duckworth u. R. S. Preston, Physic. Rev. **79**, 402 [1950].
[14] A. H. Wapstra, Physica **16**, 33 [1950].
[15] W. S. Koski, T. Wentink u. V. W. Cohen, Physic. Rev. **81**, 296 [1951].
[16] S. Geschwind u. R. Günther-Mohr, Physic. Rev. **81**, 882 [1951].
[17] H. E. Duckworth u. R. S. Preston, Physic. Rev. **82**, 468 [1951].
[18] C. W. Li, W. Whaling, W. A. Fowler u. C. C. Lauritsen, Physic. Rev. **83**, 512 [1951].
[19] H. E. Duckworth, C. L. Kegley, J. M. Olson u. G. S. Stanford, Physic. Rev. **83**, 1114 [1951].
[20] T. L. Collins, A. O. Nier u. W. H. Johnson, Physic. Rev. **84**, 717 [1951].